Preklopne funkcije in logična vrata

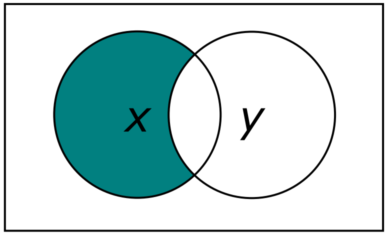
Preklopne funkcije in logična vrata

Načini zapisa Booleove (preklopne) funkcije

- zapis v eksplicitni (analitični) obliki:
  - za preproste funkcije (ena, dve, tri spremenljivke): $f(A,B)$, $f(x,y,z)$
  - za funkcije n spremenljivk: $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$
- zapis s pravilnostno tabelo
- zapis z Vennovim diagramom
- zapis s Karnaughovim diagramom (K-diagramom)

$f(x,y)= x\overline{y}$

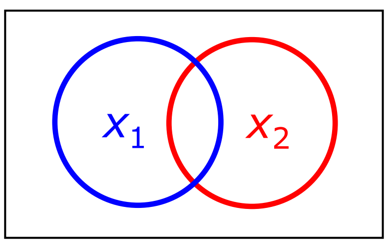
x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

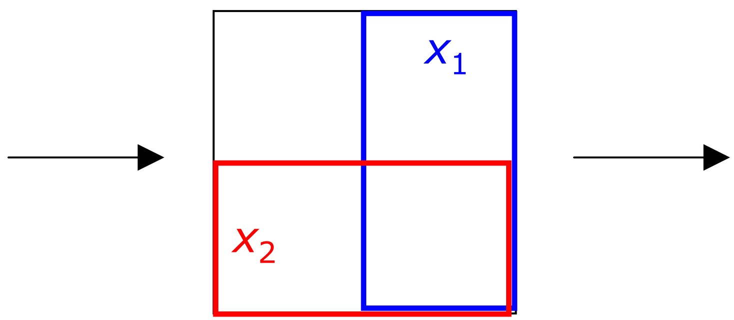


Preklopne funkcije in logična vrata

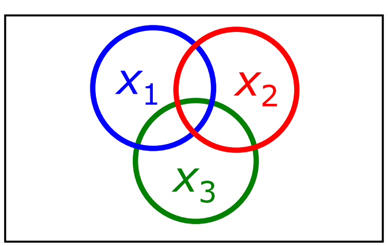
K-diagram za funkcije dveh in treh spremenljivk

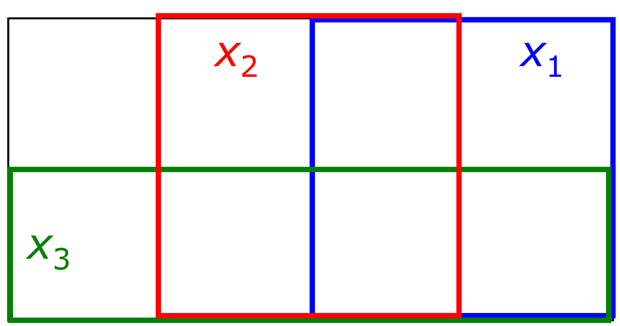
- kroge Vennovega diagrama spremenimo v pravokotnike in jih sistematično razporedimo





$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$
1	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$

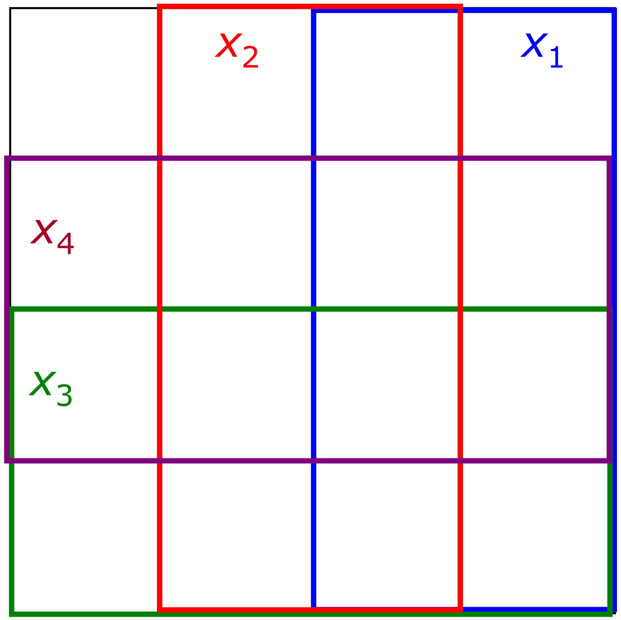


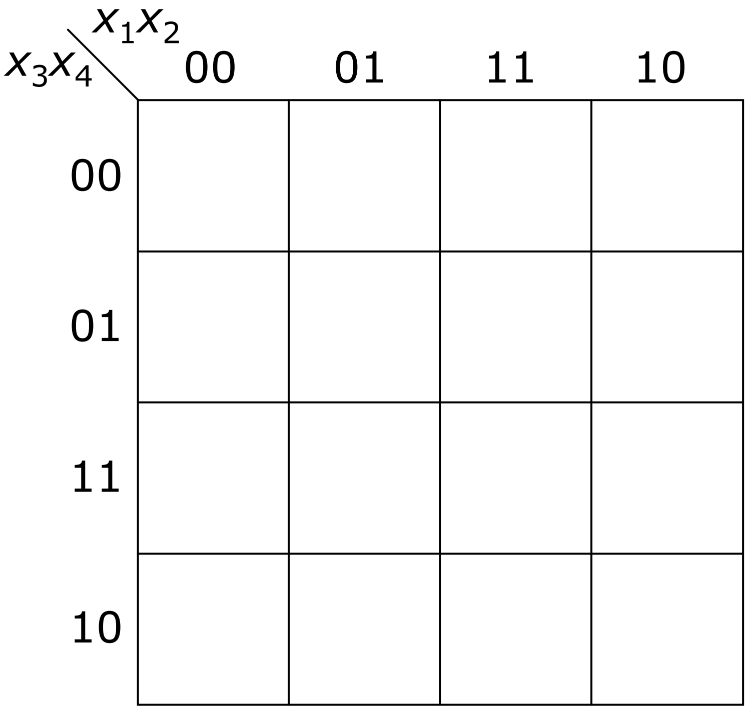


$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$	$x_1 x_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1\bar{x}_2 x_3$

Preklopne funkcije in logična vrata

K-diagram za funkcije štirih spremenljivk





Preklopne funkcije in logična vrata

K-diagram za funkcije petih spremenljivk

$x_1 = 0$

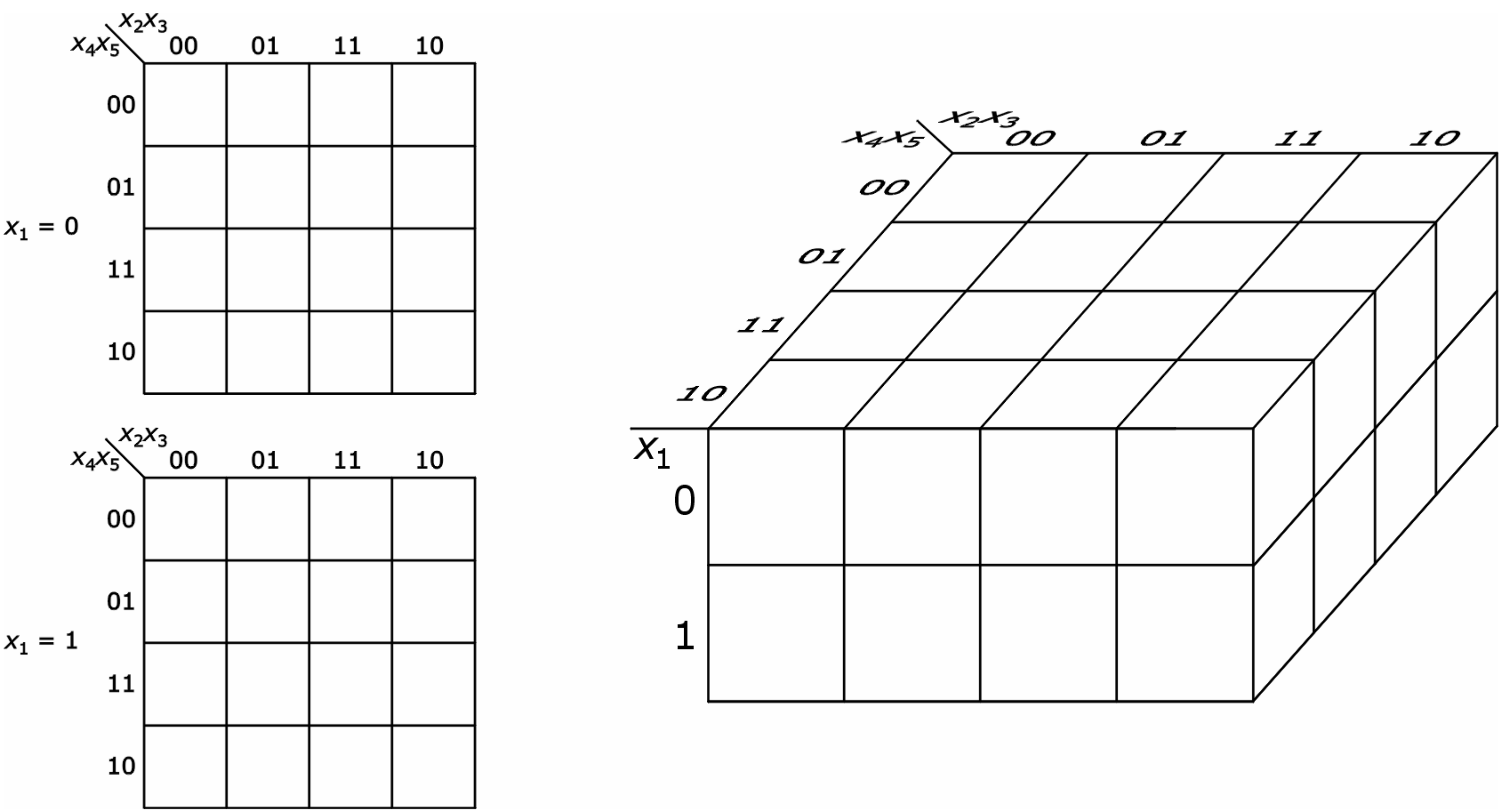
x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_1 = 1$

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

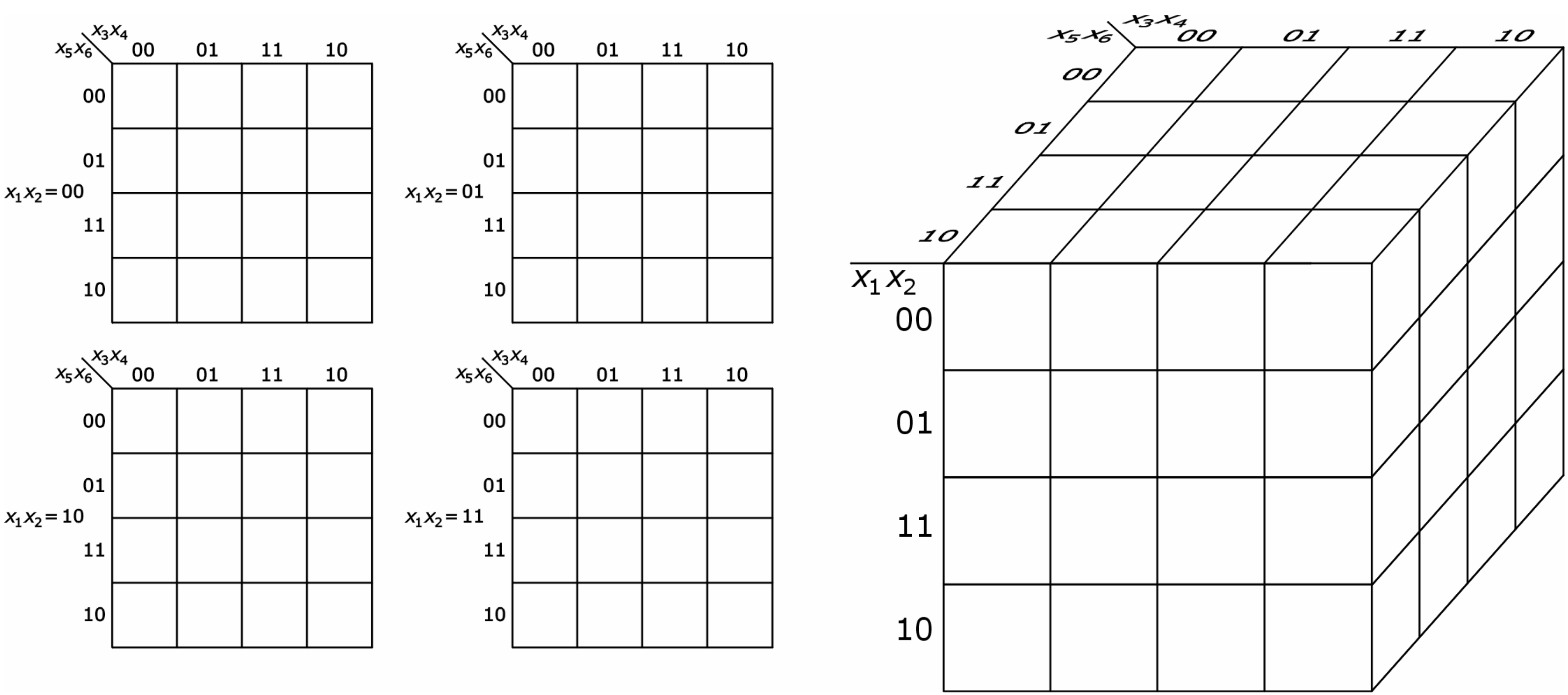
Preklopne funkcije in logična vrata

K-diagram za funkcije petih spremenljivk



Preklopne funkcije in logična vrata

K-diagram za funkcije šestih spremenljivk



Preklopne funkcije in logična vrata

Minterm in maksterm

minterm funkcije $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$: konjunkcija (Booleov produkt) vseh spremenljivk funkcije, v kateri vsaka spremenljivka nastopa enkrat, bodisi v osnovni (nenegirani) ali v negirani obliki

mintermi $f(x_1,x_2)$: $m_0=\overline{x}_1\overline{x}_2$, $m_1=\overline{x}_1x_2$, $m_2=x_1\overline{x}_2$ in $m_3=x_1x_2$

maksterm funkcije $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$: disjunkcija (Booleova vsota) vseh spremenljivk funkcije, v kateri vsaka spremenljivka nastopa enkrat, bodisi v osnovni (nenegirani) ali v negirani obliki

makstermi $f(x_1,x_2)$: $M_0=\overline{x}_1+\overline{x}_2$, $M_1=\overline{x}_1+x_2$, $M_2=x_1+\overline{x}_2$ in $M_3=x_1+x_2$

Preklopne funkcije in logična vrata

Minterm in maksterm v K-diagramu

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
1	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_2x_3$

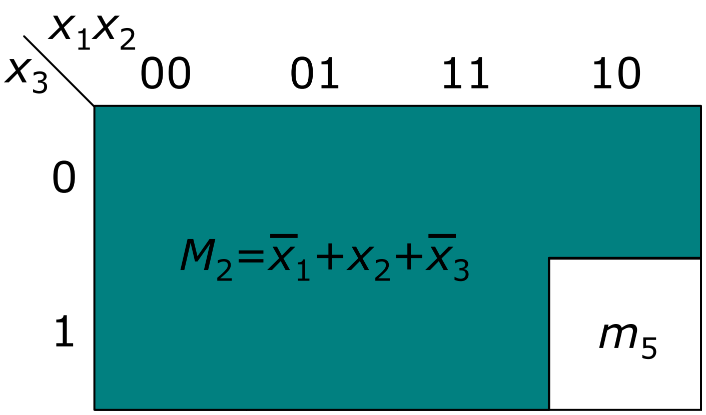
$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

- vsak minterm predstavlja eno polje K-diagrama (odtod tudi ime – člen, ki ustreza minimalni površini)

Preklopne funkcije in logična vrata

Minterm in maksterm v K-diagramu

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
1	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_2x_3$



- vsak minterm predstavlja eno polje K-diagrama (odtod tudi ime – člen, ki ustreza <u>mini</u>malni površini)
- vsak maksterm predstavlja vsa polja K-diagrama razen enega (člen, ki ustreza <u>maks</u>imalni površini)
- negacija vsakega minterma je eden od makstermov, negacija vsakega maksterma pa eden od mintermov:

  $\overline{m}_i = M_{2^n-1-i}$, $\overline{M}_i = m_{2^n-1-i}$

Preklopne funkcije in logična vrata

Popolni normalni (kanonični) obliki zapisa preklopne funkcije

popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO): vsota mintermov

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i m_i \, , \qquad \alpha_i \in \{0,1\}$$

popolna konjunktivna norm. oblika (PKNO): produkt makstermov

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\beta_i + M_i), \qquad \beta_i \in \{0,1\}$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Pretvorba iz PDNO v PKNO in obratno

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i m_i = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(\alpha_i + M_{2^n-1-i}\right)$$

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} \left(\beta_i + M_i\right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \beta_i m_{2^n-1-i}$$

$f(x_1,x_2,x_3) = m_1 + m_4 + m_7$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
M	7	6	5	4	3	2	1	0

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = M_1 M_4 M_7 M_{11} M_{12} M_{14} M_{15}$

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis PDNO in PKNO iz pravilnostne tabele

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	$\boxed{1}$
0	1	0	$\boxed{1}$
0	1	1	$\boxed{1}$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	$\boxed{1}$
1	1	1	$\boxed{1}$

- PDNO: poiščemo vse vrstice, v katerih funkcija zavzame vrednost 1; zapišemo vsoto njim ustreznih mintermov (0 - sprem. negiramo, 1 - ne negiramo)

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$
$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis PDNO in PKNO iz pravilnostne tabele

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	$\boxed{0}$
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	$\boxed{0}$
1	0	1	$\boxed{0}$
1	1	0	1
1	1	1	1

- PDNO: poiščemo vse vrstice, v katerih funkcija zavzame vrednost 1; zapišemo vsoto njim ustreznih mintermov (0 - sprem. negiramo, 1 - ne negiramo)

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$
$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$

- PKNO: poiščemo vse vrstice, v katerih funkcija zavzame vrednost 0; zapišemo produkt njim ustreznih makstermov (1 - sprem. negiramo, 0 - ne negiramo)

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$$
$$= M_7 M_3 M_2$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis PDNO in PKNO iz K-diagrama

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1

- PDNO: poiščemo vsa polja, v katerih je zapisana vrednost 1; zapišemo vsoto mintermov, ki jih predstavljajo ta polja

$$f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 = m_2 + m_6 + m_3 + m_5$$

- PKNO: poiščemo vsa polja, v katerih je zapisana vrednost 0; zapišemo produkt makstermov, ki jih predstavljajo komplementi teh polj

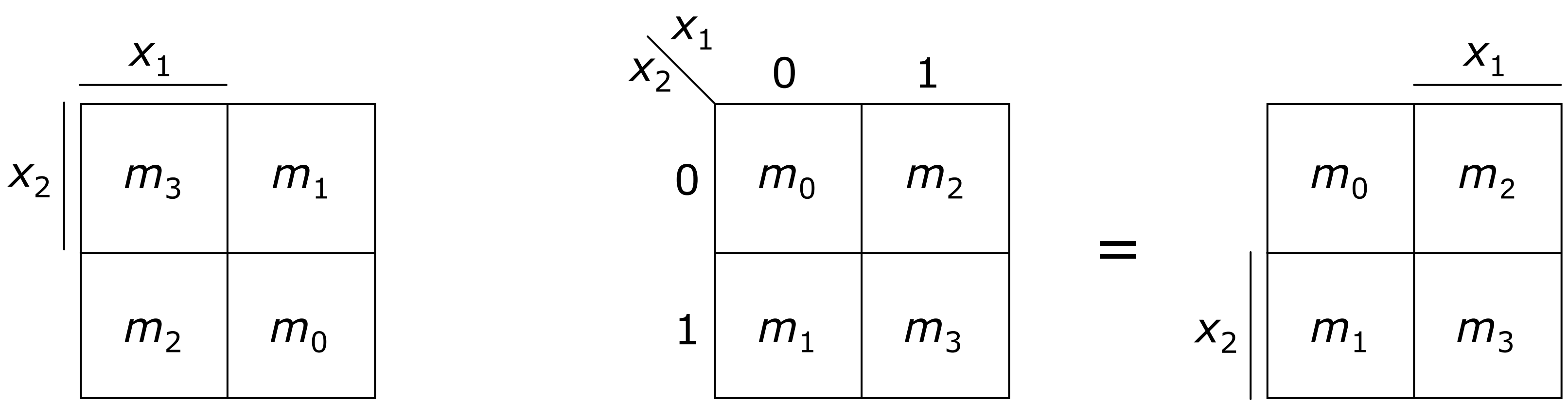
$$f(x_1,x_2,x_3) =$$

$$= (x_1+x_2+x_3)(\bar{x}_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)$$

$$= M_7 M_3 M_6 M_0$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Veitchev diagram



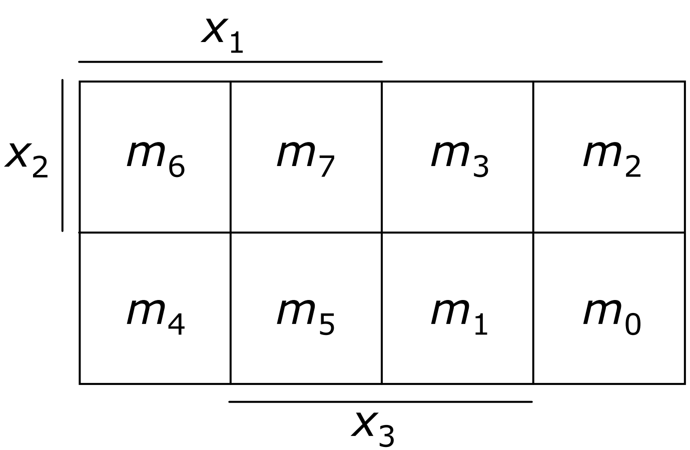
Veitchev diagram za $f(x_1,x_2)$

K-diagram za $f(x_1,x_2)$

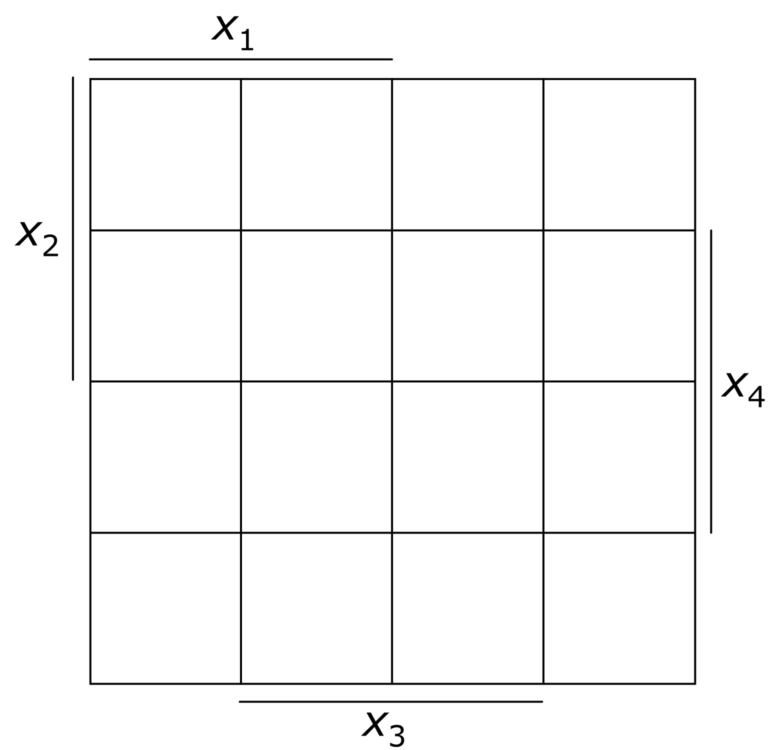
ekvivalentni Veitchev diagram

Preklopne funkcije in logična vrata

Veitchev diagram



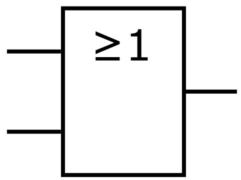
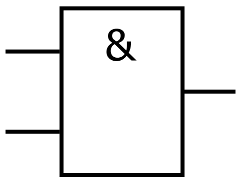
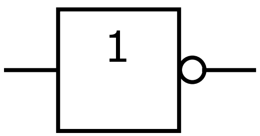
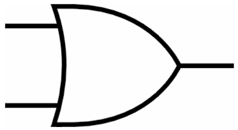
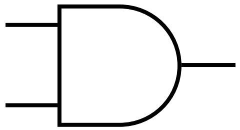
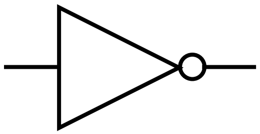
Veitchev diagram
za $f(x_1,x_2,x_3)$



Veitchev diagram
za $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis preklopnih funkcij z logičnimi vrati

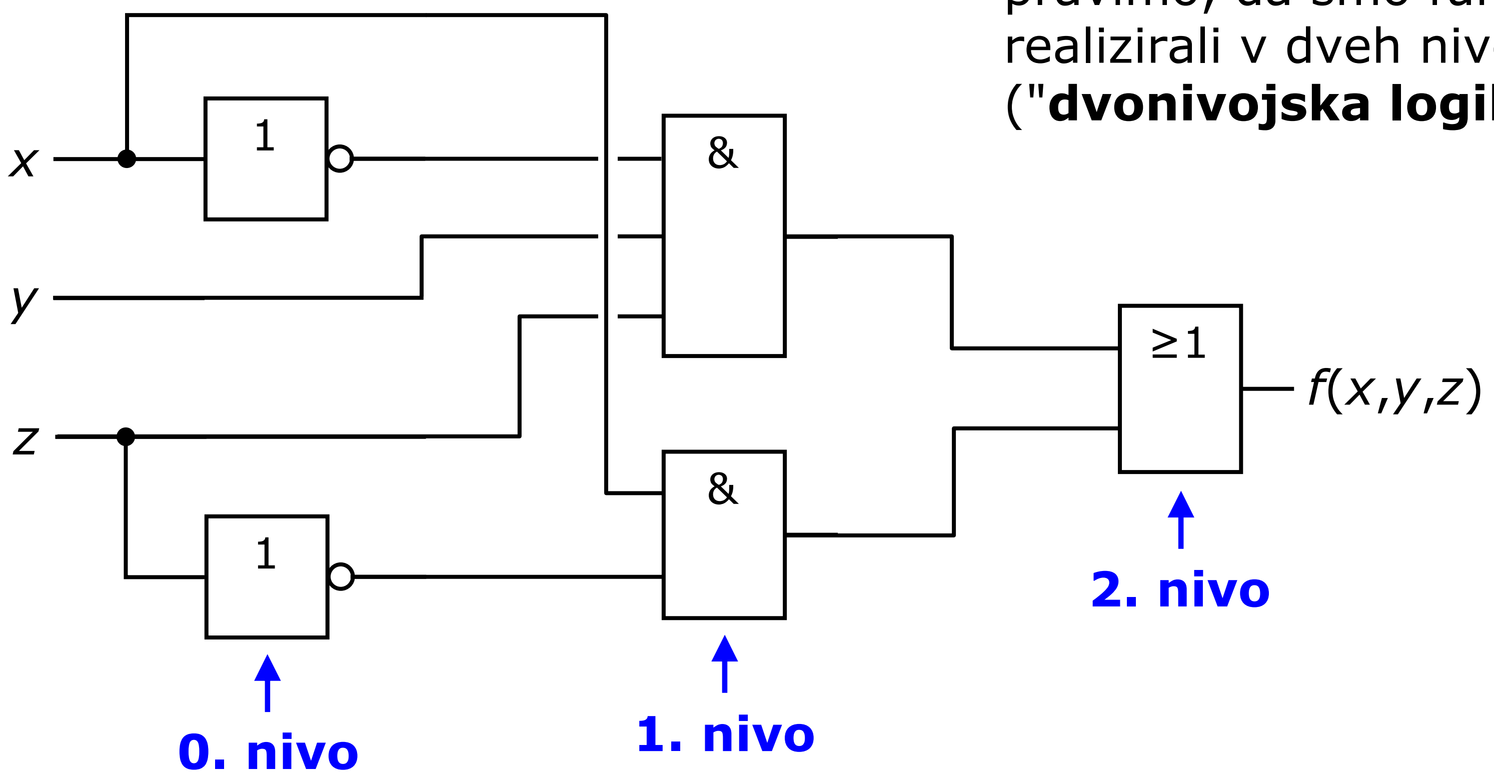
	disjunkcija (ALI, OR)	konjunkcija (IN, AND)	negacija (NE, NOT)
mednarodni standard IEC 60617-12			
ameriški standard ANSI/IEEE 91,91a			

Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis preklopnih funkcij z logičnimi vrati (simbolna shema)

$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{x}yz$

pravimo, da smo funkcijo realizirali v dveh nivojih ("**dvonivojska logika**")

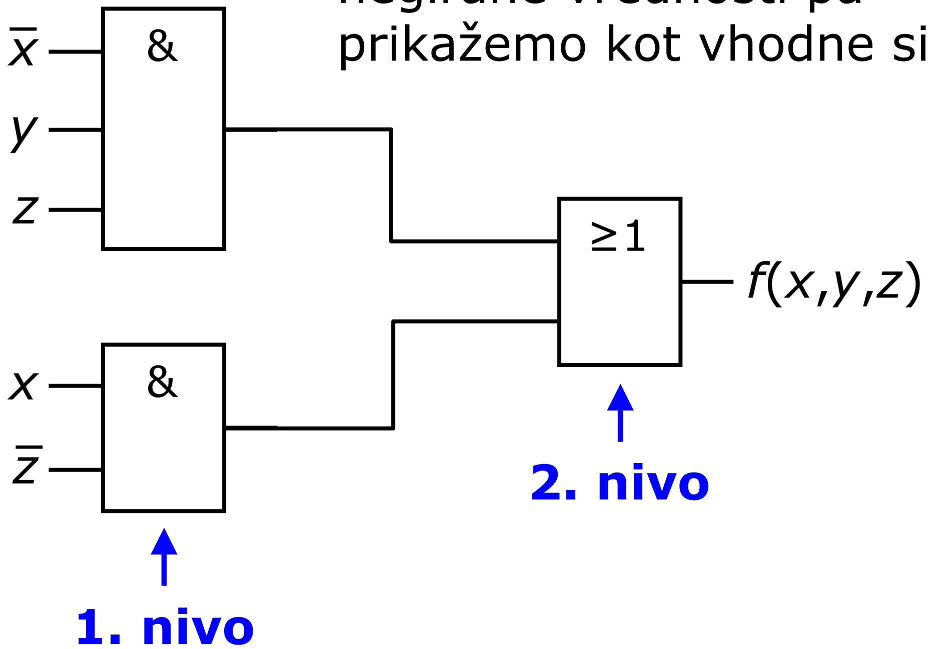


Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis preklopnih funkcij z logičnimi vrati (simbolna shema)

$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{x}yz$

pri risanju simbolne sheme negatorje pogosto izpustimo, tako spremenljivke kot njihove negirane vrednosti pa prikažemo kot vhodne signale



Preklopne funkcije in logična vrata

Preklopne funkcije dveh spremenljivk (operatorji)

x_1	x_2	f_0 0	f_1 $\downarrow$	f_2 $\overline{\leftarrow}$	f_3 $\overline{x}_1$	f_4 $\overline{\rightarrow}$	f_5 $\overline{x}_2$	f_6 $\oplus$	f_7 $\uparrow$	f_8 $\bullet$	f_9 $\equiv$	f_{10} x_2	f_{11} $\rightarrow$	f_{12} x_1	f_{13} $\leftarrow$	f_{14} $+$	f_{15} 1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- trivialne funkcije: dejansko konstante ali funkcije ene spremenljivke
- osnovne funkcije: $+$ (OR), $\bullet$ (AND), $\downarrow$ (NOR), $\uparrow$ (NAND)
- izpeljane funkcije: $\oplus$ (XOR), $\equiv$ (NXOR), dve implikaciji in dve negirani implikaciji

Preklopne funkcije in logična vrata

Funkcijsko polni sistemi

- **funkcijsko poln sistem:** nabor preklopnih funkcij dveh spremenljivk, ki omogoča zapis poljubne preklopne funkcije
- ker ima vsaka preklopna funkcija svojo pravilnostno tabelo, iz vsake pravilnostne tabele pa lahko zapišemo funkcijo v PDNO, **je sistem {+, •, ‾ } funkcijsko poln – to je <u>elementarni FPS</u>**
- tudi **sistem {+, ‾ } je funkcijsko poln**, saj lahko vsako konjunkcijo nadomestimo s kombinacijo disjunkcije in negacije:

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \text{in odtod} \qquad xy = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$$

- prav tako je **{•, ‾ } funkcijsko poln sistem**, saj lahko disjunkcijo nadomestimo s kombinacijo konjunkcije in negacije:

$$\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y} \qquad \text{in odtod} \qquad x + y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Funkcijsko polni sistemi

- Ali obstajajo funkcijsko polni sistemi z eno samo funkcijo?
- **sistem {↑} je funkcijsko poln:**
  - negacija: $x \uparrow x = \overline{x\,x} = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$
  - disjunkcija: $(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y) = \overline{x} \uparrow \overline{y} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{\overline{x + y}} = x + y$
  - konjunkcija: $(x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y) = \overline{(x \uparrow y)} = \overline{\overline{x\,y}} = x\,y$
- tudi **sistem {↓} je funkcijsko poln:**
  - negacija: $x \downarrow x = \overline{x + x} = \overline{x}\,\overline{x} = \overline{x}$
  - konjunkcija: $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = \overline{x} \downarrow \overline{y} = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x\,y$
  - disjunkcija: $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{(x \downarrow y)} = x + y$

Preklopne funkcije in logična vrata

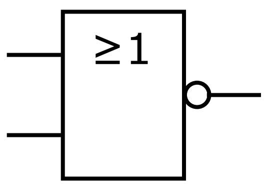
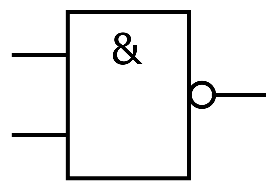
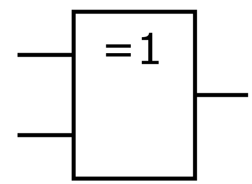
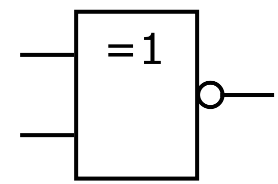
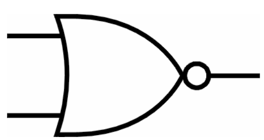
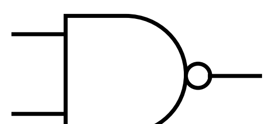
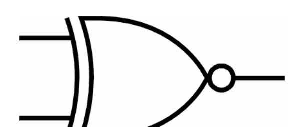
Funkcijsko polni sistemi

- poljubno preklopno funkcijo je torej mogoče realizirati izključno z vrati NAND, pa tudi izključno z vrati NOR
- poleg sistemov $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\bullet, \overline{\ }\}$ in $\{+, \overline{\ }\}$, za katere smo že pokazali, da so FPS, sta takšna tudi sistema $\{\equiv, +, 0\}$ in $\{\oplus, \bullet, 1\}$
- podobne dualne povezave, kot sta de Morganova teorema pri paru $(\bullet, +)$, imamo tudi pri paru $(\uparrow, \downarrow)$ in pri paru $(\equiv, \oplus)$, pri slednjem paru pa sta funkciji hkrati še negaciji druga druge:

$(\bullet, +)$	$(\uparrow, \downarrow)$	$(\equiv, \oplus)$
$\overline{x+y} = \overline{x} \bullet \overline{y}$	$\overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$	$\overline{x \equiv y} = \overline{x} \oplus \overline{y} = x \oplus y$
$\overline{x \bullet y} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$	$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \equiv \overline{y} = x \equiv y$

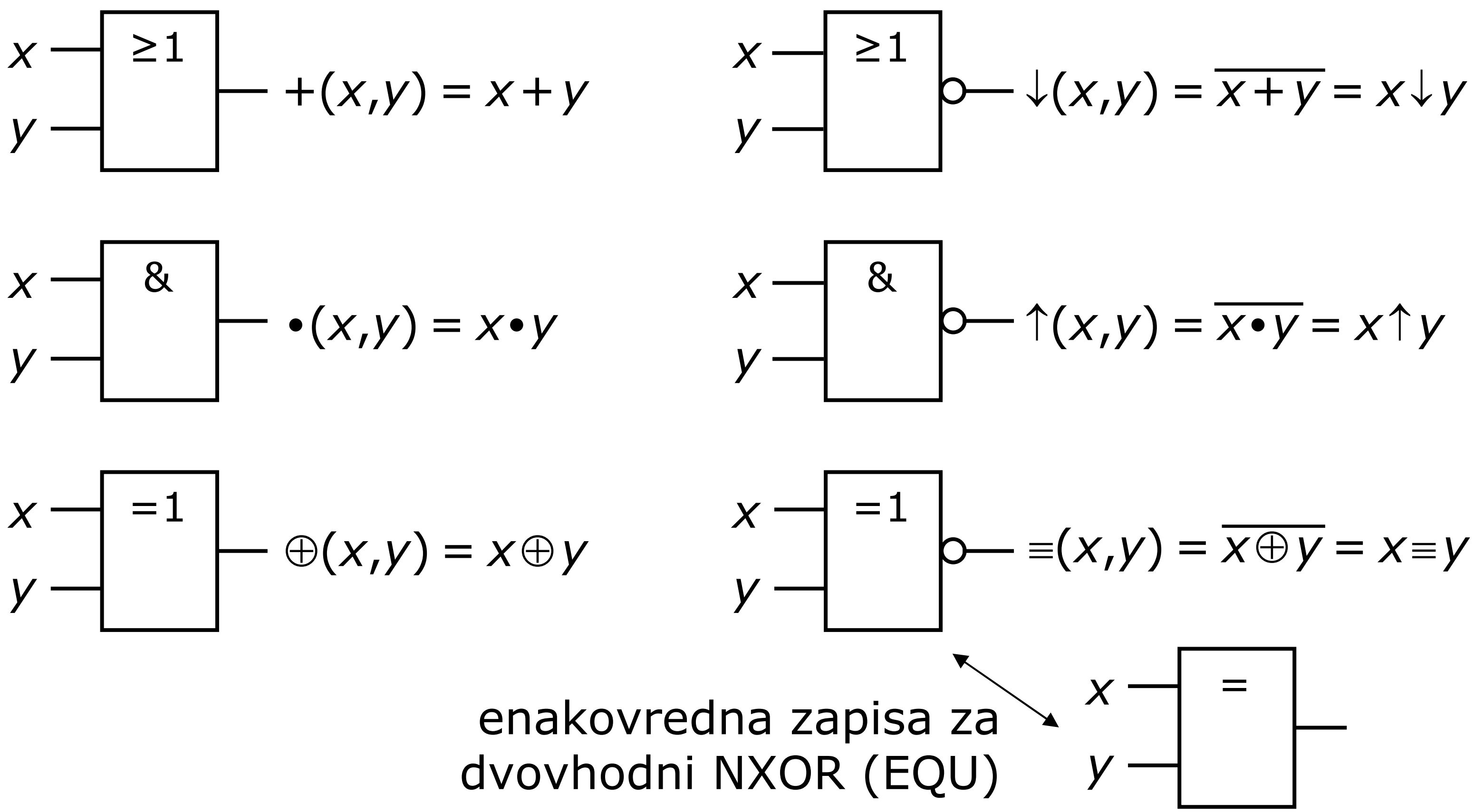
Preklopne funkcije in logična vrata

Zapis preklopnih funkcij z logičnimi vrati (nadaljevanje)

	NOR	NAND	XOR (EXOR)	NXOR (XNOR, EQU)
IEC 60617-12				
ANSI/IEEE 91,91a				

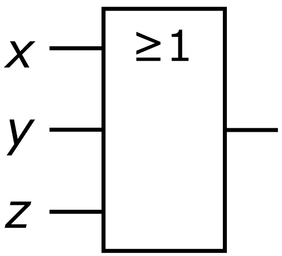
Preklopne funkcije in logična vrata

Dvovhodna logična vrata

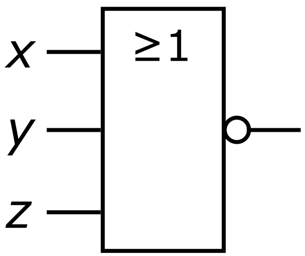


Preklopne funkcije in logična vrata

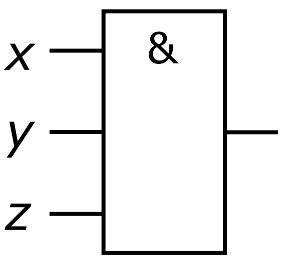
Tri- in večvhodna logična vrata



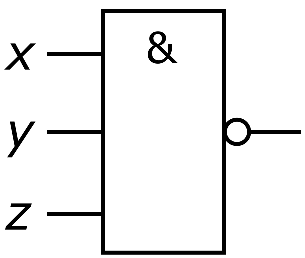
$$+(x,y,z) = x+y+z$$



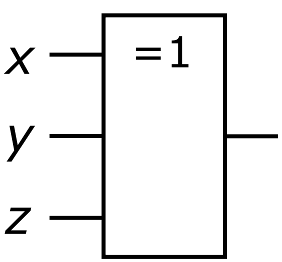
$$\downarrow(x,y,z) = \overline{x+y+z}$$
$$\neq (x\downarrow y)\downarrow z$$
$$= \overline{x+y}\downarrow z$$
$$= \overline{\overline{x+y}+z}$$



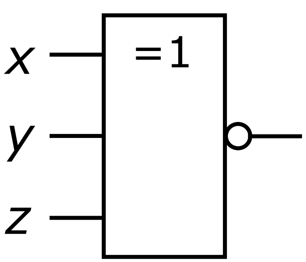
$$\bullet(x,y,z) = x\bullet y\bullet z$$



$$\uparrow(x,y,z) = \overline{x\bullet y\bullet z}$$
$$\neq (x\uparrow y)\uparrow z$$



$$\oplus(x,y,z) = x\oplus y\oplus z$$



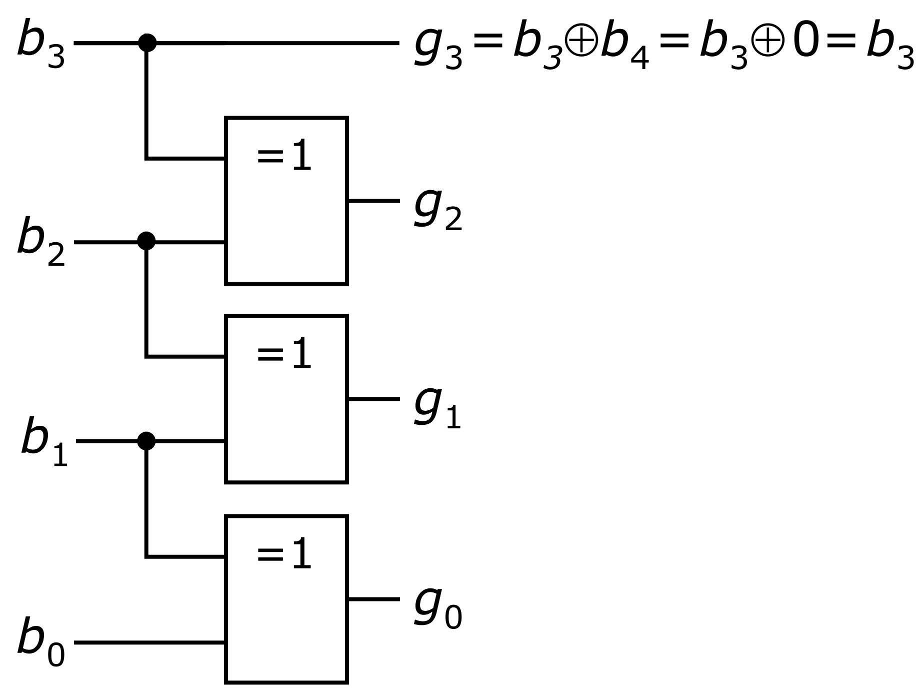
$$\equiv(x,y,z) = \overline{x\oplus y\oplus z}$$
$$\neq (x\equiv y)\equiv z$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Pretvorba binarnega zapisa števila v Grayevo kodo

$$b_n \; b_{n-1} \; \dots \; b_2 \; b_1 \; b_0 \xrightarrow{g_i \,=\, b_i \oplus b_{i+1}} g_n \; g_{n-1} \; \dots \; g_2 \; g_1 \; g_0$$

binarna	Grayeva
0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1
0 0 1 0	0 0 1 1
0 0 1 1	0 0 1 0
0 1 0 0	0 1 1 0
...	...
1 1 1 0	1 0 0 1
1 1 1 1	1 0 0 0



Preklopne funkcije in logična vrata

Poenostavljanje preklopnih funkcij

- PDNO in PKNO je preprosto zapisati in pretvarjati iz druge v drugo, a za realizacijo z logičnimi vrati potrebujemo veliko število le-teh, in to kar treh različnih vrst (AND, OR, NOT)
- v praksi želimo preklopno funkcijo realizirati čim bolj preprosto:
  (i) s čim manjšim skupnim številom vrat in/ali
  (ii) s čim manj različnimi vrstami vrat
- za (i) **minimiziramo funkcijo**; pri PDNO uporabimo teorem

  $$xy + x\overline{y} = x(y + \overline{y}) = x$$

  v pomoč pa nam je tudi K-diagram
- za (ii) **prevedemo operatorje**; FPS $\{+, \bullet, \overline{\ }\}$ nadomestimo z bolj primernim za realizacijo obravnavane funkcije: $\{\bullet, \overline{\ }\}$, $\{+, \overline{\ }\}$, $\{\uparrow\}$ ali $\{\downarrow\}$, včasih tudi $\{\oplus, \bullet, 1\}$ (npr. pretvorba binarno-Gray) ali $\{\equiv, +, 0\}$

Preklopne funkcije in logična vrata

Minimizacija

- **sosednja minterma:** minterma (konjunktivna izraza), ki se razlikujeta po negaciji natanko ene spremenljivke
- sosednja minterma lahko skrajšamo v konjunktivni izraz, ki vsebuje eno spremenljivko manj:

$$x_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3 = x_1x_3(x_2 + \overline{x}_2) = x_1x_3$$

$$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 = \overline{x}_1x_2x_4(\overline{x}_3 + x_3) = \overline{x}_1x_2x_4$$

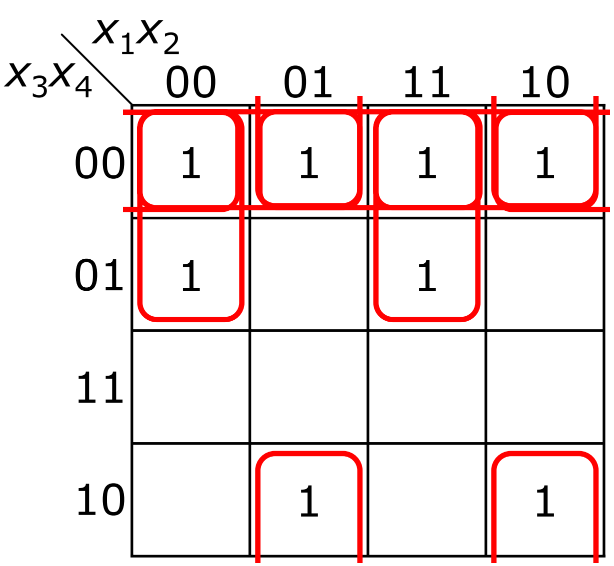
- če krajši izraz še vedno vsebuje člena, ki se razlikujeta po eni sami negaciji, lahko postopek ponovimo:

$$\begin{aligned}&\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\\ &= \overline{x}_1\overline{x}_3(x_2 + \overline{x}_2) + \overline{x}_1x_3(x_2 + \overline{x}_2) = \overline{x}_1\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_3\\ &= \overline{x}_1(x_3 + \overline{x}_3) = \overline{x}_1\end{aligned}$$

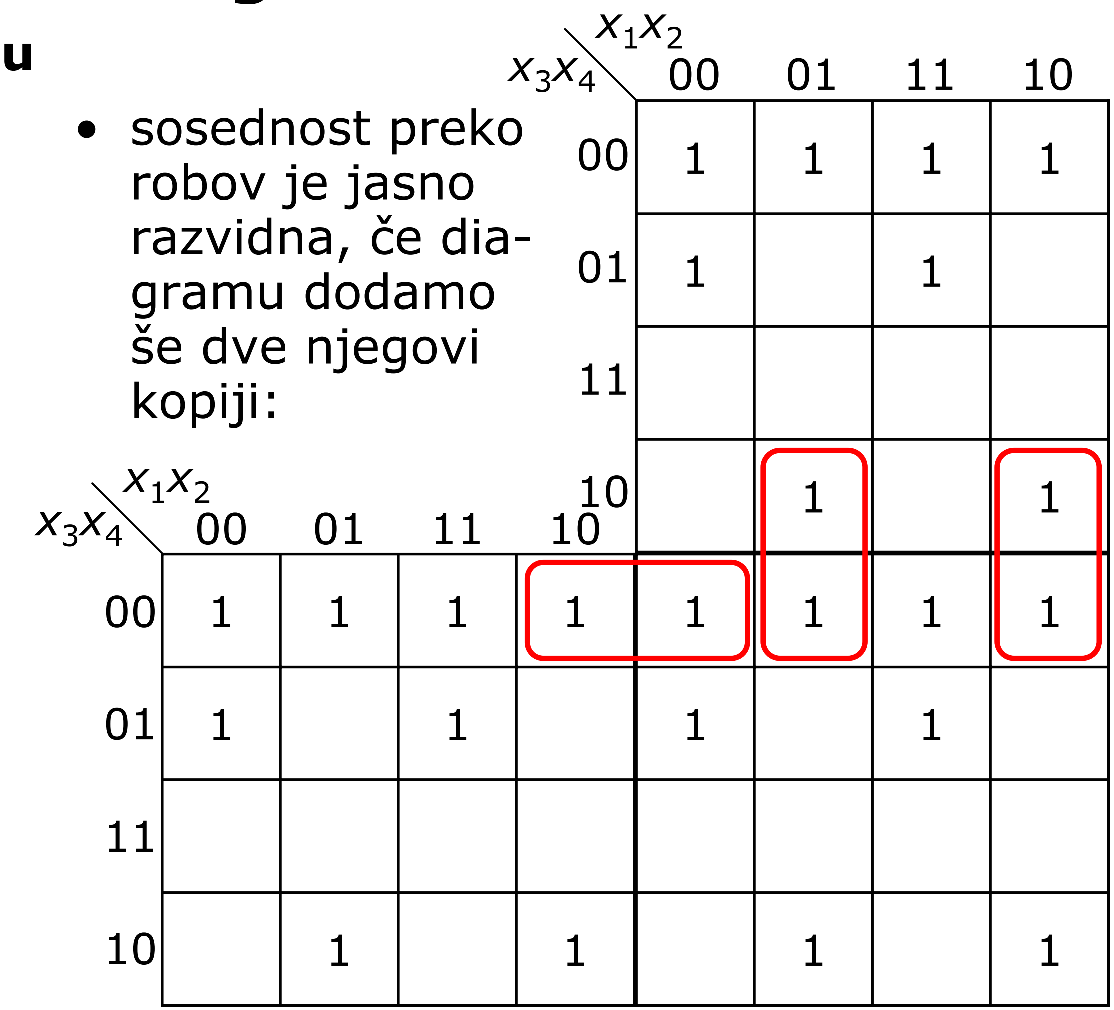
Preklopne funkcije in logična vrata

Sosednost v K-diagramu

- sosednji polji, ki obe vsebujeta enici, sta sosednja minterma:
- tudi preko robov:



- sosednost preko robov je jasno razvidna, če diagramu dodamo še dve njegovi kopiji:



Preklopne funkcije in logična vrata

Minimizacija s K-diagramom

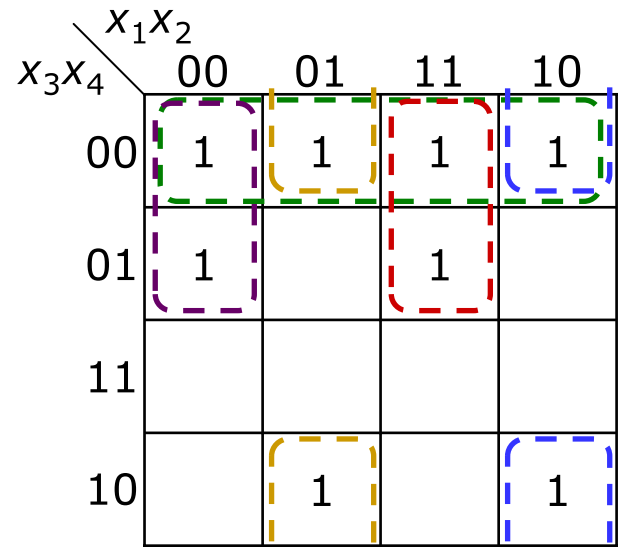
- **glavni vsebovalnik (GV):** 2^k sosednjih mintermov v skupini polj, ki je pravokotne oblike; tudi minterm brez sosedov je GV ($k = 0$)
- **ključni minterm (KM):** minterm, vsebovan le v enem GV
- **potrebni GV (PGV):** GV, ki vsebuje vsaj en KM
- postopek minimizacije:
  1. funkcijo zapišemo s K-diagramom,

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	
11				
10		1		1

Preklopne funkcije in logična vrata

Minimizacija s K-diagramom

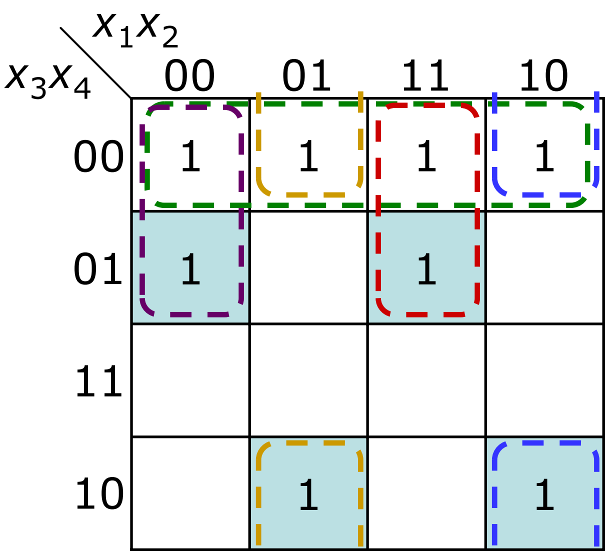
- **glavni vsebovalnik (GV):** 2^k sosednjih mintermov v skupini polj, ki je pravokotne oblike; tudi minterm brez sosedov je GV ($k = 0$)
- **ključni minterm (KM):** minterm, vsebovan le v enem GV
- **potrebni GV (PGV):** GV, ki vsebuje vsaj en KM
- postopek minimizacije:
  1. funkcijo zapišemo s K-diagramom,
  2. označimo vse GV,



Preklopne funkcije in logična vrata

Minimizacija s K-diagramom

- **glavni vsebovalnik (GV):** 2^k sosednjih mintermov v skupini polj, ki je pravokotne oblike; tudi minterm brez sosedov je GV ($k=0$)
- **ključni minterm (KM):** minterm, vsebovan le v enem GV
- **potrebni GV (PGV):** GV, ki vsebuje vsaj en KM
- postopek minimizacije:
  1. funkcijo zapišemo s K-diagramom,
  2. označimo vse GV,
  3. označimo vse KM,



Preklopne funkcije in logična vrata

Minimizacija s K-diagramom

- **glavni vsebovalnik (GV):** 2^k sosednjih mintermov v skupini polj, ki je pravokotne oblike; tudi minterm brez sosedov je GV ($k = 0$)
- **ključni minterm (KM):** minterm, vsebovan le v enem GV
- **potrebni GV (PGV):** GV, ki vsebuje vsaj en KM
- postopek minimizacije:
  1. funkcijo zapišemo s K-diagramom,
  2. označimo vse GV,
  3. označimo vse KM,
  4. označimo vse PGV in zapišemo vsoto členov, ki jih pokrivajo; to je **minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO) preklopne funkcije**

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	
11				
10		1		1

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Prevedba operatorjev iz $\{+, \cdot, \overline{}\}$ v $\{\uparrow\}$

- za prevedbo iz DNO uporabimo naslednji formuli (teorema):

$$
\begin{aligned}
& x_1x_2x_3\ldots x_k + y_1y_2y_3\ldots y_m + \ldots + z_1z_2z_3\ldots z_n \\
&= \overline{\overline{x_1x_2x_3\ldots x_k + y_1y_2y_3\ldots y_m + \ldots + z_1z_2z_3\ldots z_n}} \\
&= \overline{\overline{x_1x_2x_3\ldots x_k} \bullet \overline{y_1y_2y_3\ldots y_m} \bullet \ldots \bullet \overline{z_1z_2z_3\ldots z_n}} \\
&= \uparrow(\overline{x_1x_2x_3\ldots x_k}, \overline{y_1y_2y_3\ldots y_m}, \ldots, \overline{z_1z_2z_3\ldots z_n}) \\
&= \uparrow(\uparrow(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k), \uparrow(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_m), \ldots, \uparrow(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_n))
\end{aligned}
$$

in $$\overline{x} = x \uparrow x$$

- primer: $f(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4$

$$
\begin{aligned}
&= \uparrow(\uparrow(x_1,x_2,\overline{x}_3), \uparrow(x_1,x_3,\overline{x}_4), \uparrow(\overline{x}_1,x_2,x_3), \uparrow(\overline{x}_1,\overline{x}_3,\overline{x}_4)) \\
&= \uparrow(\uparrow(x_1,x_2,\uparrow(x_3,x_3)), \uparrow(x_1,x_3,\uparrow(x_4,x_4)), \\
&\qquad \uparrow(\uparrow(x_1,x_1),x_2,x_3), (\uparrow(x_1,x_1), \uparrow(x_3,x_3), \uparrow(x_4,x_4)))
\end{aligned}
$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Posebne funkcije

pragovna funkcija:

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, za katero obstajata takšna množica celih števil $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ in takšno celo število P, da velja

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{če } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i < P\\ 1, & \text{če } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq P\end{cases}$$

številom $w_1,w_2,\ldots,w_n$ pravimo **uteži**, številu P pa **prag** funkcije.

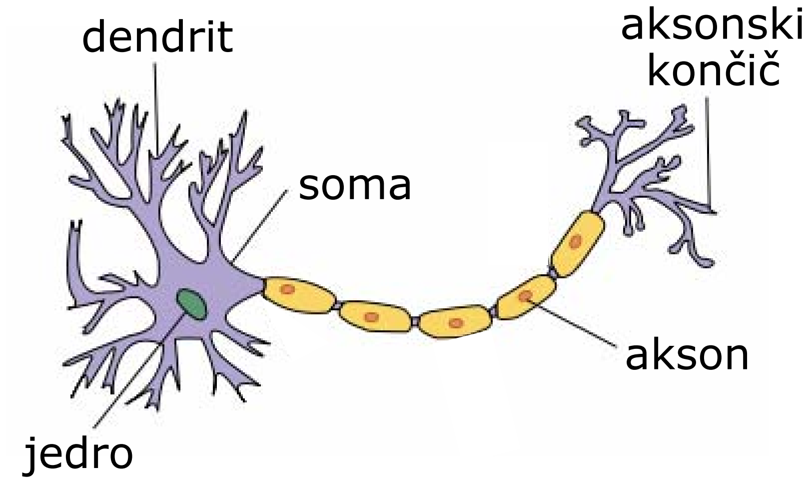
pragovni element:

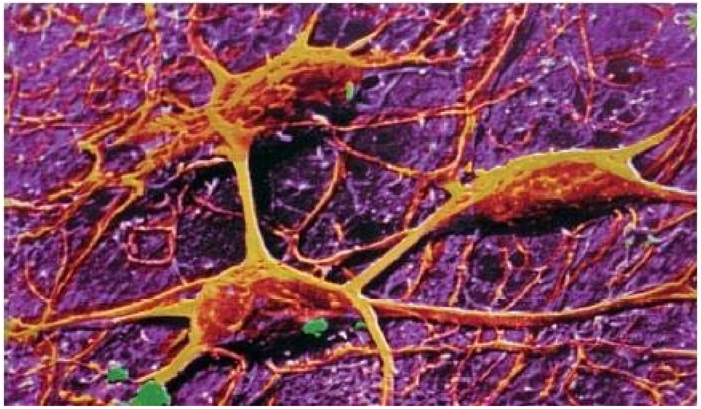
skupina logičnih vrat, katere izhod f je pragovna funkcija vhodov $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

Preklopne funkcije in logična vrata

Živčna celica (nevron)

- dve stanji: aktivno (oddaja signal) in pasivno (ne oddaja)
- povezave med nevroni so sinapse; na eni strani je končič aksona, na drugi dendrit
- prevajanje vselej v smeri dendrit → soma → akson
- sinapse ekscitacijske (signal na aksonu - signal na dendritu) ali inhibicijske (signal "negirajo")
- soma glede na signale z dendritov in glede na svoj prag pošlje živčni signal naprej v akson (aktivira nevron) ali ne



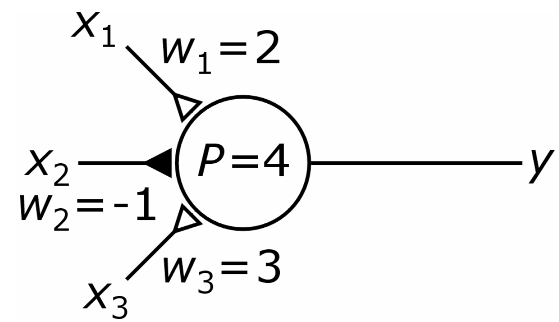


trije nevroni v človeških možganih

Preklopne funkcije in logična vrata

Formalni nevron – pragovni model nevrona

- formalni nevron je pragovni element, s katerim lahko približno opišemo ali simuliramo obnašanje dejanskega biološkega nevrona
- izberemo število sinaps (n), njihovo naravo (torej množico $\{w_1,w_2,...,w_n\}$, kjer za ekscitacijske sinapse izberemo $w_i > 0$, za inhibicijske $w_i < 0$) in prag aktivacije nevrona (P)
- zapišemo pravilnostno tabelo, iz nje DNO in odtod realizacijo z logičnimi vrati – torej realizacijo pragovnega elementa



x_1	x_2	x_3	$\Sigma w_i x_i$	y
0	0	0	0	0
0	0	1	3	0
0	1	0	-1	0
0	1	1	2	0
1	0	0	2	0
1	0	1	5	1
1	1	0	1	0
1	1	1	4	1

Preklopne funkcije in logična vrata

Zakasnitve v sistemih logičnih vrat in hazard

- pri dosedanji obravnavi smo privzeli, da se logična vrata na spremembo vrednosti na (enem ali več) vhodih odzovejo brez zakasnitve – da se torej sočasno s spremembo x oziroma x_1, x_2, ..., x_n spremeni tudi $f(x)$ oziroma $f(x_1, x_2, ..., x_n)$
- pri dejanskih logičnih vratih pa so ne glede na tehnološko izvedbo vselej prisotne zakasnitve
- **prehodni pojav:** časovni potek vrednosti izhodne in notranjih spremenljivk v strukturah, sestavljenih iz logičnih vrat, od trenutka, ko se spremeni vrednost na vhodu, do trenutka, ko se vrednost na izhodu ustali na *pravilni* vrednosti
- **hazard:** možnost, da ob spremembi na vhodu pride do začasne spremembe izhoda v vrednost, ki je glede na vrednosti na vhodih *nepravilna*

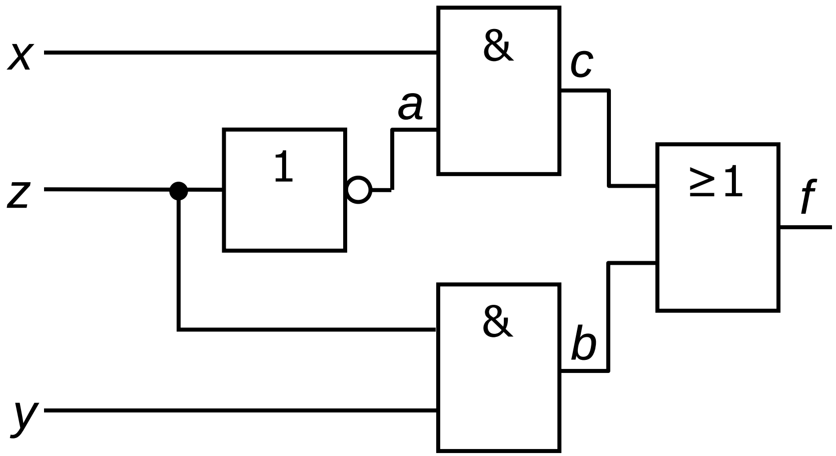
Preklopne funkcije in logična vrata

Statični in dinamični hazard

- **statični hazard:** možnost, da ob spremembi vhoda, ob kateri se *pravilna* vrednost izhoda ne spremeni, pride do začasne spremembe izhoda na nepravilno vrednost in nato do vrnitve na pravilno vrednost
- **dinamični hazard:** možnost, da ob spremembi vhoda, ob kateri se *pravilna* vrednost izhoda spremeni, ta sprememba sicer nastopi, nato pa pride do začasnega preskoka nazaj na nepravilno vrednost in do ponovne vrnitve na pravilno vrednost; preskokov pred ustalitvijo na pravilni vrednosti je lahko tudi več

Preklopne funkcije in logična vrata

Statični hazard

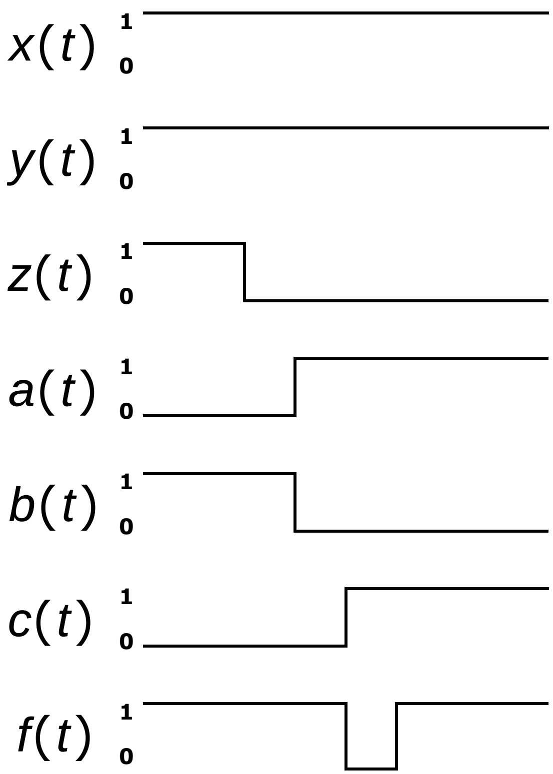


$f(x,y,z) = x\bar{z} + yz$

$f(1,1,1) = 1 \bullet 0 + 1 \bullet 1 = 1$

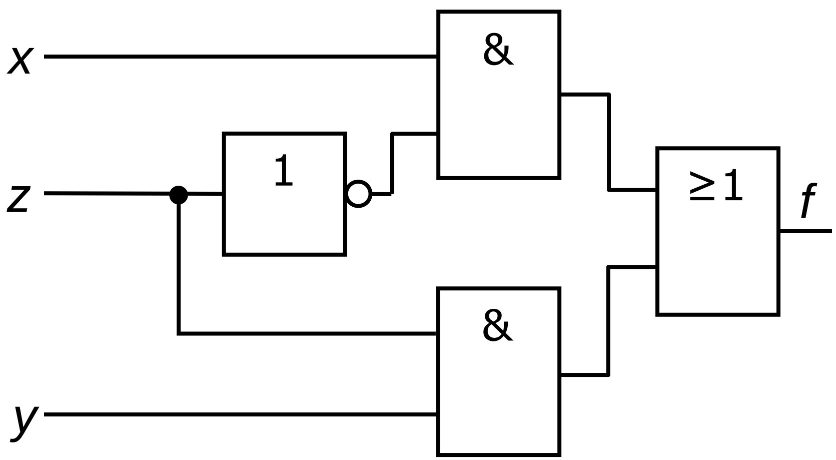
$f(1,1,0) = 1 \bullet 1 + 1 \bullet 0 = 1$

- sprememba (x,y,z) iz (1,1,1) v (1,1,0):



Preklopne funkcije in logična vrata

Statični hazard

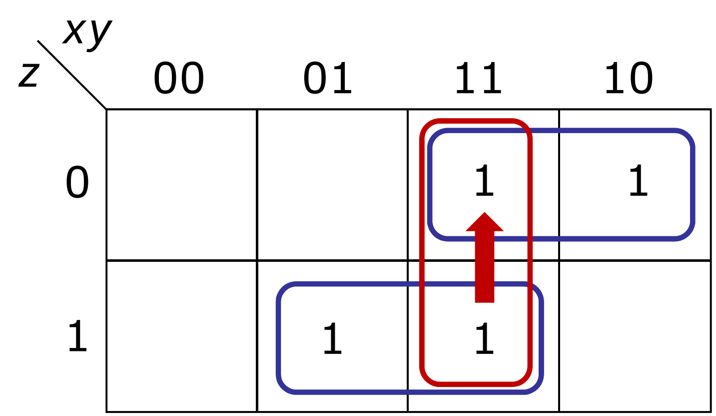


$f(x,y,z) = x\bar{z} + yz$

$f(1,1,1) = 1{\cdot}0 + 1{\cdot}1 = 1$

$f(1,1,0) = 1{\cdot}1 + 1{\cdot}0 = 1$

- K-diagram vezja:

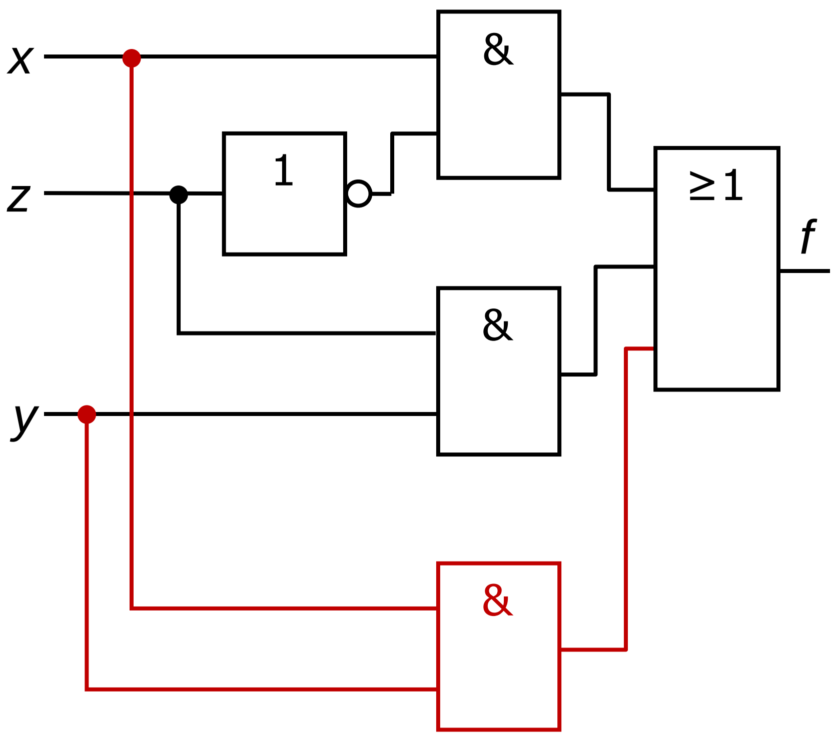


- hazard odpravimo tako, da dodamo člen, ki pokrije problematični prehod:

$f(x,y,z) = x\bar{z} + yz \color{red}{+ xy}$

Preklopne funkcije in logična vrata

Statični hazard



- K-diagram vezja:

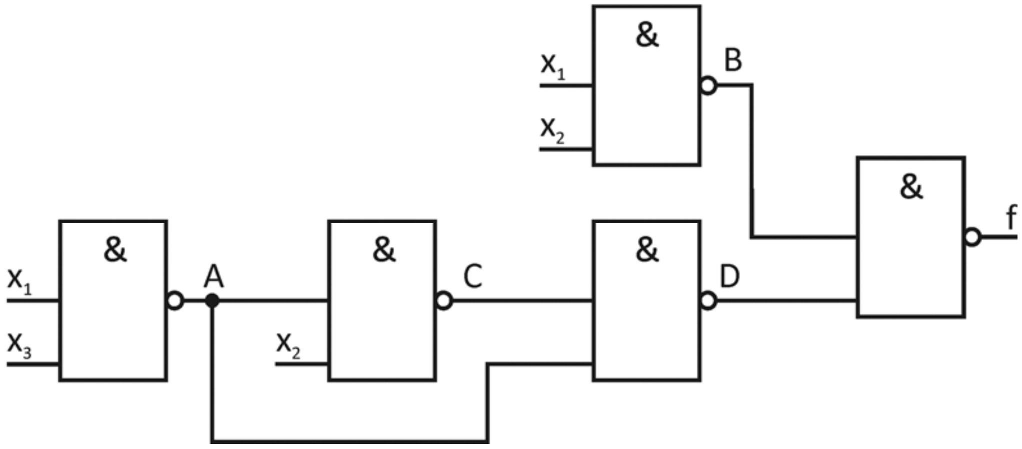
$z \backslash xy$	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	

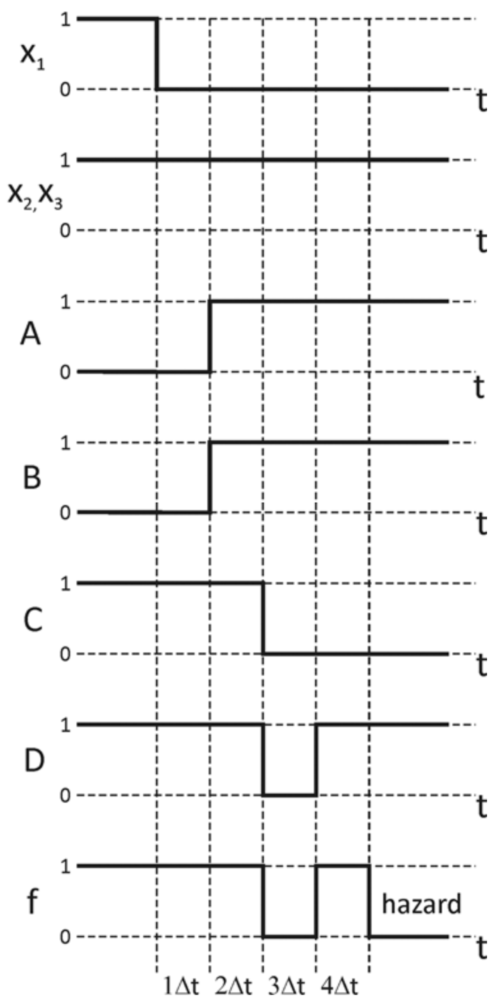
- hazard odpravimo tako, da dodamo člen, ki pokrije problematični prehod:

$$f(x,y,z) = x\overline{z} + yz + xy$$

Preklopne funkcije in logična vrata

Dinamični hazard



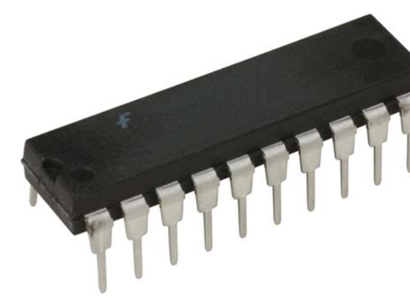


Preklopne funkcije in logična vrata

Tehnološke izvedbe preklopnih funkcij

- preklopne funkcije izvedemo z električno krmiljenimi stikali
  - od začetka 1930-ih: **releji**
  - od sredine 1940-ih: **elektronke** (hitrejše, brez gibljivih delov)
  - od začetka 1950-ih: **tranzistorji** (še hitrejši, manjši in cenejši)
  - od začetka 1960-ih: **integrirana vezja** (vsi tranzistorji, ostali elementi logičnih vrat in povezave med njimi združeni v skupno strukturo iz trdnih polprevodnih snovi)





Preklopne funkcije in logična vrata

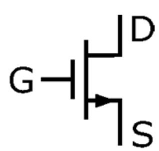
Tehnološke izvedbe preklopnih funkcij

- od sredine 1950-ih: **RTL tehnologija (Resistor-Transistor Logic)** – iz **bipolarnih tranzistorjev** in **uporov**;
- od konca 1950-ih: **DTL (Diode-Transistor Logic)** – iz **bipolarnih tranzistorjev**, **diod** in **uporov**;
- od začetka 1960-ih: **TTL (Transistor-Transistor Logic)** – iz **bipolarnih tranzistorjev** in **uporov**; v integriranih vezjih hitro izrinila starejši tehnologiji
- od sredine 1960-ih: **NMOS / PMOS (n-channel / p-channel Metal-Oxide Semiconductor)** – iz **unipolarnih tranzistorjev** (MOS FET – MOS Field-Effect Transistor)
- od konca 1970-ih: **CMOS (Complementary MOS)** – iz parov NMOS in PMOS tranzistorjev z zrcalno simetričnimi karakteristikami; danes že skoraj povsem izrinila TTL

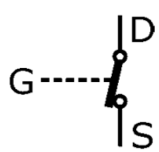
Preklopne funkcije in logična vrata

Izvedba preklopnih funkcij v tehnologiji CMOS

n-kanalni MOSFET tranzistor (NMOS)

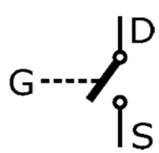


$U_{GS} > 0$ in $U_{DS} > 0$



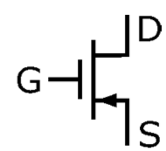
$I_{DS} > 0$

sicer

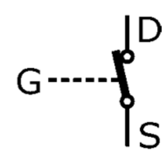


$I_{DS} = 0$

p-kanalni MOSFET tranzistor (PMOS)

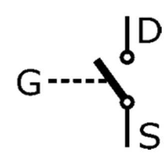


$U_{GS} < 0$ in $U_{DS} < 0$



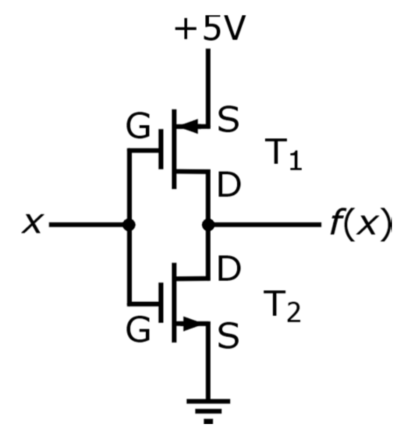
$I_{DS} < 0$

sicer



$I_{DS} = 0$

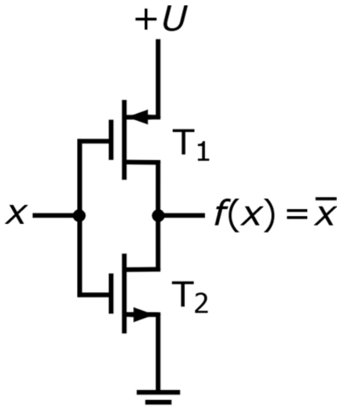
komplementarna vezava (CMOS)



x	T_1	T_2	$f(x)$
0 V	skl	raz	5 V
5 V	raz	skl	0 V

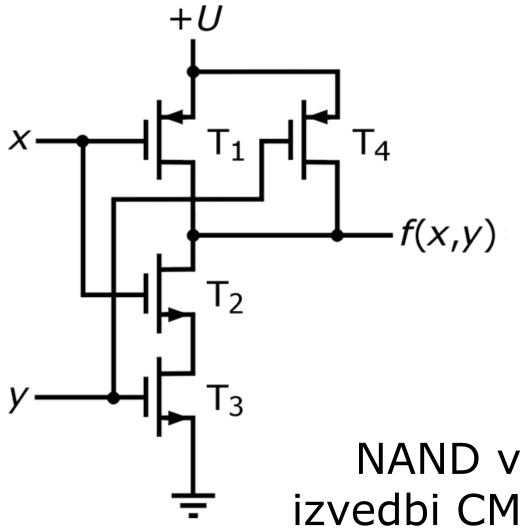
Preklopne funkcije in logična vrata

Izvedba preklopnih funkcij v tehnologiji CMOS



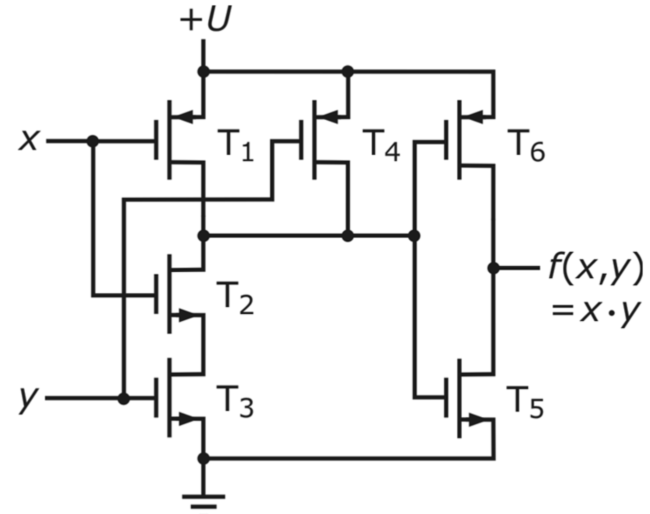
NOT (negator)
v izvedbi CMOS

x	T_1	T_2	$f(x)$
0	S	R	1
1	R	S	0



NAND v
izvedbi CMOS

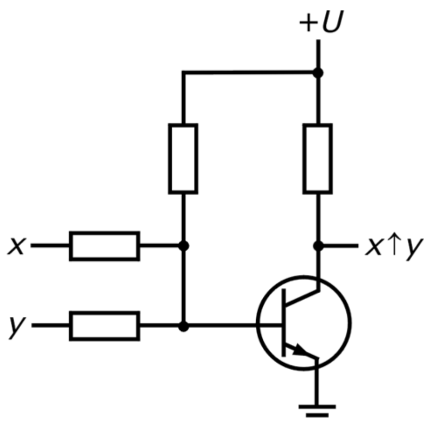
x	y	T_1	T_2	T_3	T_4	$f(x,y)$
0	0	S	R	R	S	1
0	1	S	R	S	R	1
1	0	R	S	R	S	1
1	1	R	S	S	R	0



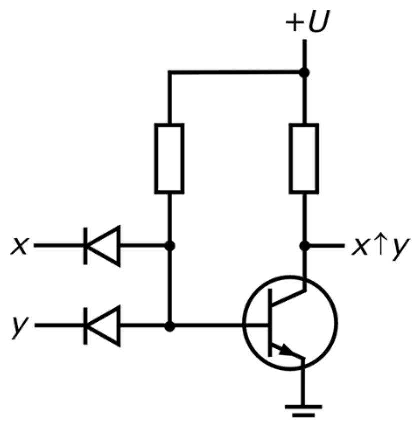
AND v izvedbi CMOS

Preklopne funkcije in logična vrata

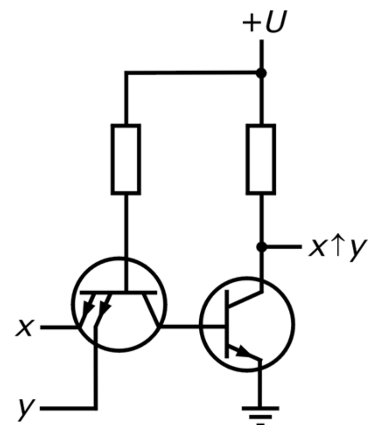
Starejše tehnološke izvedbe preklopnih funkcij



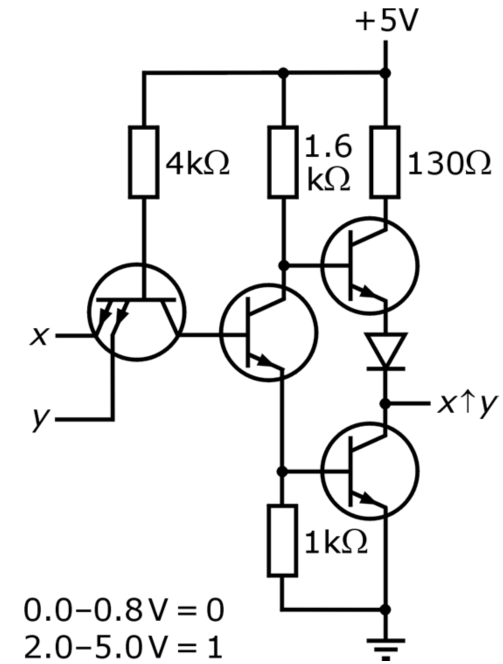
vrata NAND v
RTL tehnologiji
(prototip)



vrata NAND v
DTL tehnologiji
(prototip)



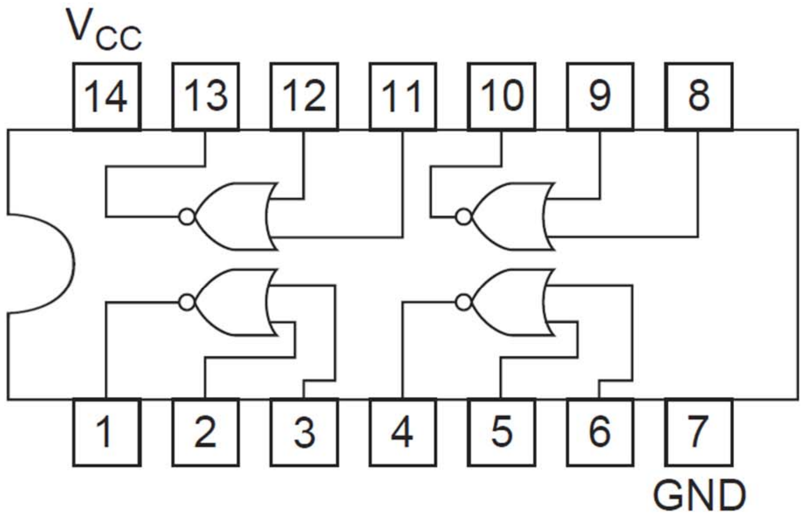
vrata NAND v
TTL tehnologiji
(prototip)



vrata NAND
v TTL tehnologiji
(primer dejanske
izvedbe)

Preklopne funkcije in logična vrata

Integrirana vezja



razporeditev logičnih vrat NOR v integriranem vezju SN74HC02N (štirikratni dvovhodni NOR proizvajalca Texas Instruments z izvedbo logičnih vrat v tehnologiji CMOS in z izvedbo ohišja v tehnologiji DIP)

Preklopne funkcije in logična vrata

Poimenovanje integriranih vezij

1. predpona (neobvezna), 1- do 3-mestna črkovna: proizvajalec

2. predpona, 2-mestna številska: pogoji za pravilno delovanje

1. del korena, 1- do 3-mesten črkovni:
tehnološka izvedba logičnih vrat

2. del korena, 2- ali 3-mesten številski: funkcija vezja

pripona (neobvezna), 1- do 3-mestna črkovna:
tehnološka izvedba ohišja

SN74HC02N

Preklopne funkcije in logična vrata

Poimenovanje integriranih vezij

1. predpona (neobvezna), 1- do 3-mestna črkovna: proizvajalec

2. predpona, 2-mestna številska: pogoji za pravilno delovanje

SN74HC02N

AD	Analog Devices
DP	National Semiconductor
F,FC	Fairchild
MC	Motorola
PA	Intel
SA	Signetics
SC,SE	Philips
SN	Texas Instruments
...	...

54	zunanja temperatura od −55°C do +125°C ("vojaška izvedba")
74	zunanja temperatura od −40°C do +85°C ("civilna izvedba"); nekaj nižji maksimalni dovoljeni tokovi kot pri "54"

Preklopne funkcije in logična vrata

Poimenovanje integriranih vezij

1. del korena, 1- do 3-mesten črkovni: tehnološka izvedba logičnih vrat

koda	LS	AS	ALS	F	HC	HCT	AHC	AHCT	ALVC	AUC
tehnologija	TTL	TTL	TTL	TTL	CMOS	CMOS	CMOS	CMOS	CMOS	CMOS
napetost (V)	5	5	5	5	5	5	5	5	3.3	1.8
vrata $f(x,y) = x \uparrow y$:										
• zakasnitev (ns)	9	1.7	4	3	9	10	3.7	5	2.5	2.0
• izh. tok pri $f = 0$ (mA)	8	20	8	20	0.02	0.02	0.05	0.05	0.02	0.01
• izh. tok pri $f = 1$ (mA)	0.4	2	0.4	1	0.02	0.02	0.05	0.05	0.02	0.01
• poraba moči (mW)	2	8	1.2	4	0.01[a] 0.55/MHz[b]	0.01[a] 0.38/MHz[b]	0.03[a] 0.06/MHz[b]	0.03[a] 0.07/MHz[b]	0.01[a] 0.54/MHz[b]	0.01[a] 0.05/MHz[b]

SN74HC02N

[a] v stacionarnem stanju
[b] pri periodičnem preklapljanju

Preklopne funkcije in logična vrata

Poimenovanje integriranih vezij

SN74HC02N

2. del korena, 2- ali 3-mesten številski: funkcija vezja

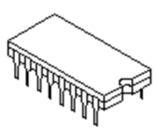
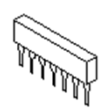
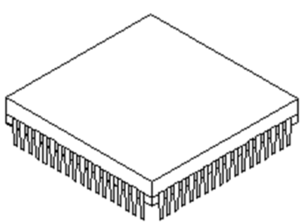
00	4x 2-vhodni NAND
02	4x 2-vhodni NOR
04	6x NOT
08	4x 2-vhodni AND
10	3x 3-vhodni NAND
11	3x 3-vhodni AND
20	2x 4-vhodni NAND
21	2x 4-vhodni AND
25	2x 4-vhodni NOR
30	1x 8-vhodni NAND
32	4x 2-vhodni OR
86	4x 2-vhodni XOR
...	...

148	binarni kodirnik 8/3 s prioriteto
147	BCD kodirnik 10/4 s prioriteto
154	binarni dekodirnik 4/16
150	16-vhodni multipleksor
155	2x 4-izhodni demultipleksor
85	4-bitni primerjalnik velikosti
283	4-bitni paralelni seštevalnik
382	4-bitna 8-operacijska ALU
73	2x spominska celica JK
79	2x spominska celica D
163	4-bitni sinhronski števec
91	8-bitni pomikalni register
...	...

Preklopne funkcije in logična vrata

Poimenovanje integriranih vezij

pripona (neobvezna), 1- do 3-mestna črkovna:
tehnološka izvedba ohišja

J,N	Y	F,FK	D,DB,W,PW	...
DIP (dual in-line package) 	SIP (single in-line package) 	PGA (pin grid array) 	SMD (surface-mount device) 	...

SN74HC02N